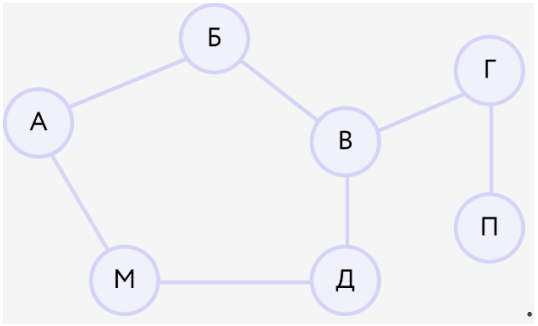
ГРАФ – МОДЕЛЬ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКУ

Задача 1. Команда працює добре, якщо вона дружна. Дружною вважатимемо таку команду, в якій від кожного її учасника до будь-якого іншого можна побудувати ланцюжок спільних друзів.

Чи буде дружною команда із наступних учасників:

Ася дружить з Богданом, Богдан – з Василем, Василь – з Галею та Дмитром, Марічка – з Асею та Дмитром, а Павло – з Галею.



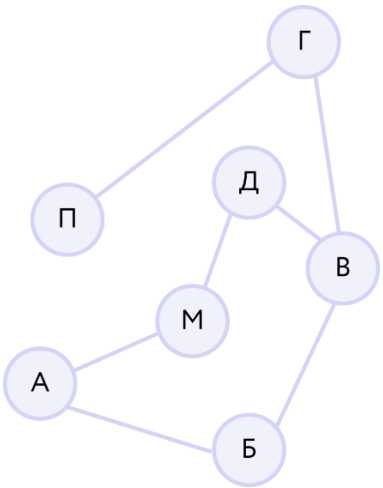
Граф – це інформаційна модель взаємозв'язку між об'єктами.

Вони моделюють *взаємозв'язки* між об'єктами – **вершинами** графа.

У нашому прикладі це учасники команди, які позначені першими літерами імен.

Лінії, що зображають *зв'язки* між об'єктами, називають **ребрами** графа.

Розташування вершин графа для нас несуттєве. Той самий граф можна було зобразити і так:



Послідовність вершин, з'єднаних ребрами, називається **шляхом**.

Питання 1. Яку довжину має найкоротший шлях між Павлом і Богданом?

Наш граф є **зв'язним**: з будь-якої його вершини існує шлях до будь-якої іншої.

Питання 2, 3. Чи залишиться команда дружною, якщо Ася та Богдан посваряться? А якщо посваряться Галя та Василь?

У нашому графі дружби ребра поєднують вершини у будь-якому напрямі: якщо А дружить із Б, то Б дружить із А.

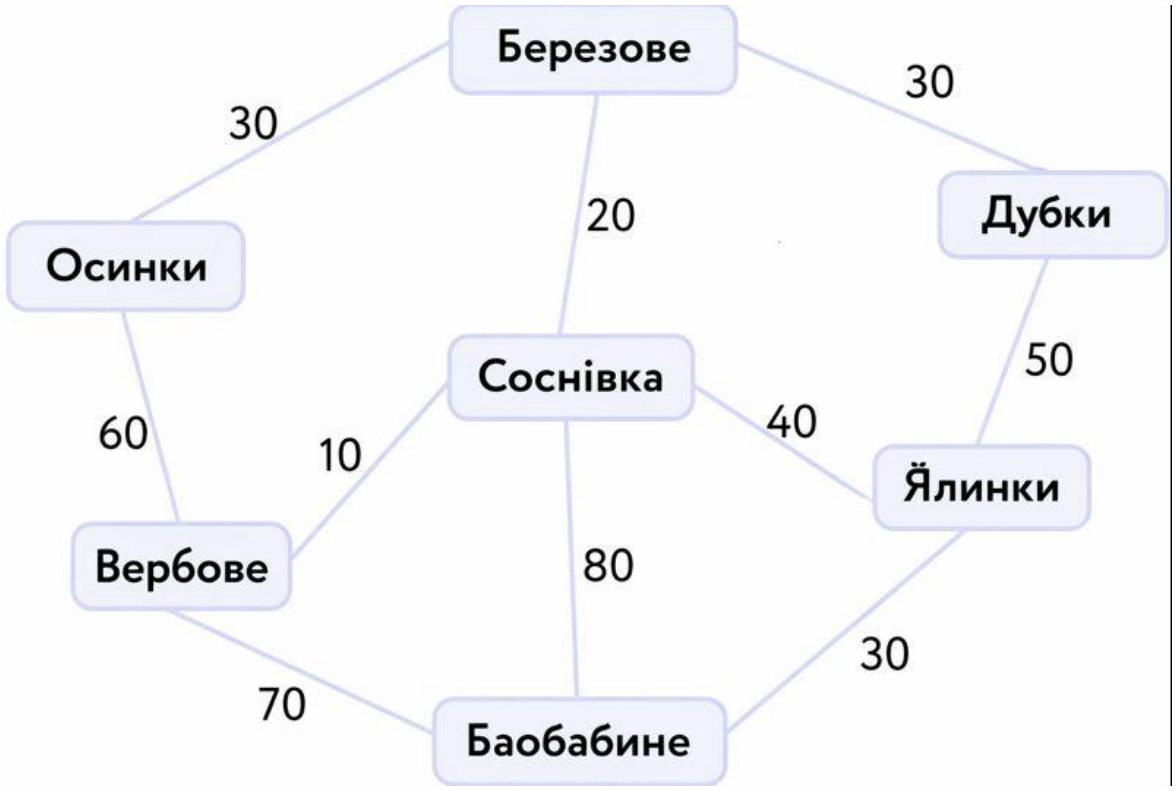
Такий граф, де ребра поєднують вершини у ***будь-якому*** напрямку, називається **неорієнтованим**.

Бувають і орієнтовані графи, у яких ребра мають напрям і позначаються стрілками (ребра-стрілки іноді називають **дугами**).

Питання 4. Якщо ми відобразимо у вигляді графа не дружбу, а любов, то який у нас вийде граф: орієнтований чи неорієнтований?

Ще один різновид графа – **зважений граф**: у ньому кожному ребру відповідає число, його "вага".

Приклад 2. Схема маршрутів автобусів, у якій на ребрах-дорогах вказано вартість проїзду ними.



Яка мінімальна вартість проїзду з Осинок в Баобабине?

ОСНОВНІ ТЕРМІНИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Багато об'єктів, що виникають у житті, можуть бути змодельовані (представлені в пам'яті комп'ютера) за допомогою графів. Наприклад, транспортні схеми (схема метрополітену тощо) зображують у вигляді станцій, з'єднаних лініями, комп'ютерні мережі та комунікаційні технології (маршрутизація пакетів). У термінах графів станції називаються вершинами графа, а лінії ребра.

Графом називається скінченна множина **вершин** і множина **ребер**. Кожному ребру відповідають дві вершини – кінці ребра.

Бувають різні варіанти визначення графа. У цьому визначенні кінці кожного ребра – рівноправні. У цьому випадку немає різниці, де початок, а де – кінець у ребра. Але, наприклад, у транспортних мережах бувають випадки одностороннього руху по ребру, тоді говорять про **орієнтований** граф – граф, у ребер якого одна вершина вважається початковою, а інша – кінцевою.

Якщо деяке ребро u з'єднує дві вершини A і B графа, то кажуть, що ребро u **інцидентне** вершинам A і B, а вершини у свою чергу інцидентні ребру u. Вершини, з'єднані ребром, називаються **суміжними**.

Ребра називаються **кратними**, якщо вони з'єднують ту саму пару вершин (а у випадку орієнтованого графа – якщо у них збігаються початку та кінці). Ребро називається **петлею**, якщо в нього збігаються початок і кінець. У багатьох задачах кратні ребра та петлі не становлять інтересу, тому можуть розглядатися лише графи без петель та кратних ребер. Такі графи називаю **простими**.

Степенем вершини в неорієнтованому графі називається число інцидентних даній вершині ребер (при цьому петля рахується двічі, тобто ступінь – це кількість «кінців» ребер, що входять у вершину). Досить очевидно, що сума степенів усіх вершин дорівнює подвоєному числу ребер у графі. Звідси можна порахувати максимальне число ребер у простому графі – якщо у графа N вершин, то степінь кожної з них дорівнює N-1, отже, число ребер є

$N(N-1)/2$.

Граф, у якому будь-які дві вершини з'єднані одним ребром, називається **повним** графом.

Також легко помітити наступний факт – у будь-якому графі число вершин непарного степеня – парне. Цей факт називається «лемою про рукостискання» – у будь-якій компанії кількість людей, які зробили непарну кількість рукостискань, завжди парне.

Шляхом на графі називається послідовність ребер, у якій кінець одного ребра є початком наступного ребра. Початок першого ребра називається початком шляху, кінець останнього ребра – кінцем шляху. Якщо початок і кінець шляху збігаються, такий шлях називається **циклом**.

Шлях, який проходить через кожну вершину не більше одного разу, називається **простим шляхом**. Аналогічно визначається **простий цикл**.

Граф називається **зв'язним**, якщо між будь-якими двома його вершинами є шлях. Якщо граф незв'язний, його можна розбити на кілька частин (підграфів), кожна з яких буде зв'язною. Такі частини називаються **компонентами зв'язності**. Можливо, деякі компоненти зв'язності будуть складатися лише з однієї вершини.

Зрозуміло, що у графа з N вершин може бути від 1 до N компонент зв'язності.

Розглянемо зв'язний граф із N вершинами. Яке мінімальне число ребер може бути у ньому?

Нескладно побудувати приклад графа, що містить N-1 ребро – наприклад, можна взяти одну вершину графа та з'єднати її з іншими за допомогою N-1 ребра. Неважко також зрозуміти, що у такому графі не повинно бути простих циклів (інакше у простому циклі можна викинути одне ребро і граф залишиться зв'язним). Такі графи називають **деревами**.

Деревом називається зв'язний граф, що не містить простих циклів.

Неважко бачити, що у дереві не можна видалити жодного ребра, щоб граф залишився зв'язним. Тому дерево є мінімальним зв'язним графом.

Основною властивістю дерева є така теорема: ***Дерево з N вершинами містить N-1 ребро***.

Можна показати, що еквівалентні такі визначення дерева:

1) Деревом називається зв'язний граф, що не містить простих циклів.

2) Деревом називається зв'язний граф, що містить N вершин та N-1 ребро.

3) Деревом називається зв'язний граф, який при видаленні будь-якого ребра перестає бути зв'язним.

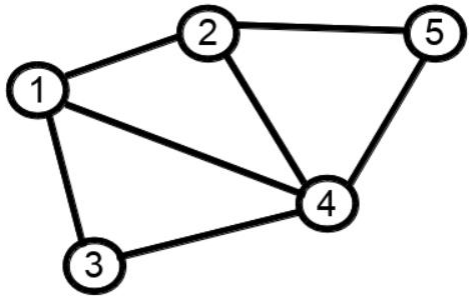
4) Деревом називається граф, у якому будь-які дві вершини з'єднані рівно одним простим шляхом.

Дуже часто в дереві виділяється одна вершина, яка називається **коренем** дерева, дерево з виділеним коренем називають кореневим або підвішеним деревом. Прикладом такого дерева є генеалогічне дерево.

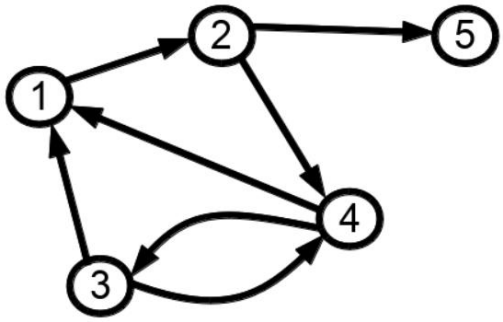
При поданні графа **матрицею суміжності** інформація про ребра графа зберігається в квадратній матриці (двовимірному списку), де елемент a_{ij} дорівнює 1, якщо ребра *i* і *j* з'єднані ребром, і дорівнює 0 в іншому випадку.

Якщо граф неорієнтований, то матриця суміжності завжди симетрична щодо головної діагоналі.

Задача 3. Записати матрицю суміжності для неорієнтованого графа.



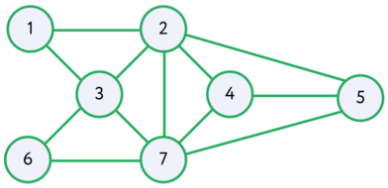
Задача 4. Записати матрицю суміжності для орієнтованого графа.

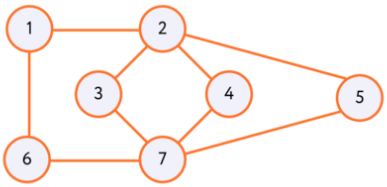


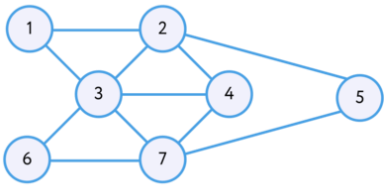
Задача 5. Ви стоїте на автовокзалі у селі Річкове. Вам треба якнайшвидше потрапити до Водяного. Зараз восьма ранку, перед вами розклад автобусів. Прямий автобус до Водяного пішов з Річкового півгодини тому. Потрібно шукати варіанти з пересадками. Яким може бути найраніший час прибуття до Водяного?

Час відправлення	Звідки	Куди	Час прибуття	Час відправлення	Звідки	Куди	Час прибуття
6:20	Озерне	Ставки	7:00	13:15	Річкове	Озерне	13:45
7:30	Річкове	Водяне	11:10	14:40	Водяне	Озерне	16:55
8:10	Ставки	Калюжне	9:20	14:50	Морське	Ставки	15:15
8:50	Річкове	Озерне	9:20	15:20	Водяне	Річкове	18:50
10:00	Водяне	Калюжне	12:10	16:00	Озерне	Морське	17:00
10:00	Калюжне	Ставки	10:50	16:00	Ставки	Річкове	17:50
10:10	Річкове	Ставки	11:20	18:00	Річкове	Ставки	19:10
11:15	Озерне	Водяне	14:30	18:10	Калюжне	Річкове	19:30
11:25	Ставки	Морське	11:50	19:15	Ставки	Морське	19:40
11:30	Річкове	Калюжне	13:10	20:30	Річкове	Калюжне	21:50
12:00	Морське	Водяне	14:10	21:40	Морське	Водяне	23:50
12:30	Калюжне	Водяне	14:40	22:00	Калюжне	Річкове	23:40

Задача 6. У новому котеджному селищі 7 будиночків. Вони вже стоять, а доріжки ще тільки мають прокласти. Є три плани їхньої прокладки. Потрібно вибрати такий, за якого бульдозер зможе розчистити всі доріжки, проходячи по кожній по одному разу. При цьому він має повернутися до початкової точки. Який з наступних планів прокладки доріжок слід обрати?







Властивість графа «намалювати його одним розчерком» в теорії графів називається **планарністю**. Існує простий спосіб виявляти непланарні графи. Якщо від вершини відходить непарне число ребер, вона повинна бути або початком шляху, або його кінцем. Але шлях має один кінець і один початок (вони можуть збігатися), і, отже, граф, у якому понад дві вершини з непарним числом ребер, планарним не буде.

Задача 7. Сидір – любитель гірських лиж та смачних обідів. Цього року він проводить відпустку на гірськолижному курорті НЯМ-НЯМ. Відпочинок там побудований в такий спосіб. Зранку всіх відпочиваючих завозять на вершину. Там вони відвідують ресторан «Старт», потім спускаються трасами, зупиняючись біля численних ресторанів, і закінчують день вечерею у ресторані «Фініш». Дивлячись на карту НЯМ-НЯМа, Сидір задумався: а чи зможе він щодня своєї двотижневої відпустки спускатися від «Старту» до «Фініша» різними шляхами? Тобто скільки можливих шляхів є від «Старту» до «Фініша» на НЯМ-НЯМі?

Для підрахунку числа шляхів використовують прийом, який називається **розмітка графа.**

Задача 8. Ви – чарівник-початківець. Перед вами 6 золотих монет. Ваша мета – перетворити їх на 100 монет. У вашому розпорядженні три заклинання:

1) ПомножитиНа5;

2) Додати1;

3) Забрати2.

Як виконати перетворення, використавши якнайменшу кількість заклинань?

Задача 9. Скількома способами можна розшифрувати повідомлення

@#@###@#@@,

якщо відомо, що

А — це @, У — ##, О — @#, Е — #@@, І — @##, Ы — ###?

Розв'яжіть задачу за допомогою дерева, на кожному рівні перебираючи всі варіанти розшифровки чергової літери.

1.1. 3

1.2. Так. Видалення ребра АБ не порушить зв'язності графа.

1.3. Ні. Видалення ребра ВГ призведе до того, що команда розпадеться на дві компанії: Галя та Павло відокремляться від інших.

1.4. Граф буде орієнтованим, тому що відношення любові несиметричне.

2. 120, шлях матиме довжину 4 і пройде через Березове, Соснівку та Ялинки.

3.

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	0
2	1	0	0	1	1
3	1	0	0	1	0
4	1	1	1	0	1
5	0	1	0	1	0

4.

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	0	1	1
3	1	0	0	1	0
4	1	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0

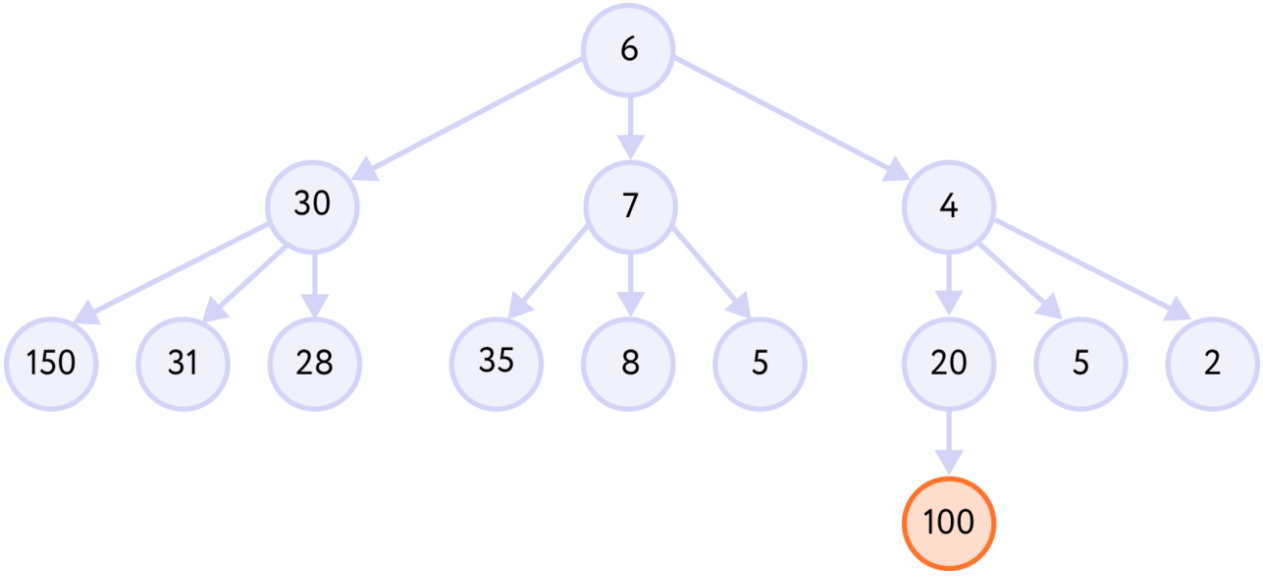
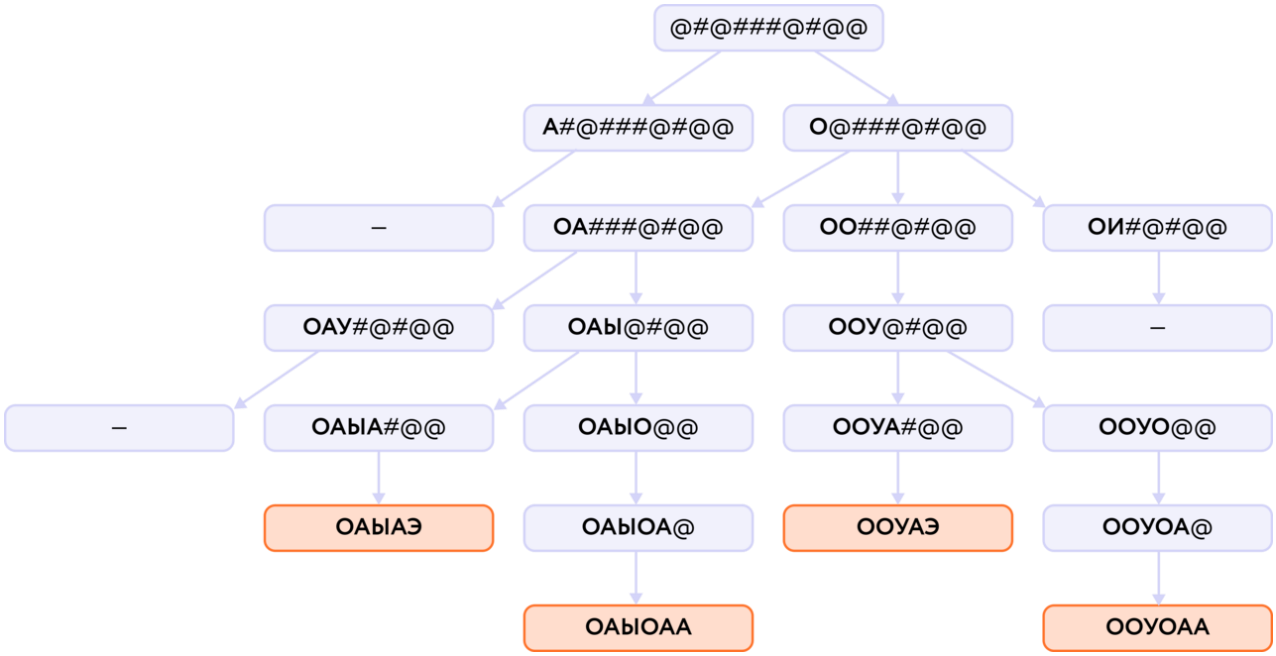
5. 14:10. Шлях лежить через Ставки та Морське. Зі Ставків в Морське рейсом 11:25, прибуття об 11:50 і о 12:00 рейс на Водяне.

6. Підходить лише червоний план. Синій план дозволяє побудувати шлях, при якому всі доріжки проходять по разу (наприклад, 376347521324), але початок

і кінець шляху не збігатимуться. А ось для зеленого графа шлях, що включає в себе всі ребра, неможливо побудувати.

7. 14

8. 3. 3)1)1)



9. 4 варіанти.